**MATRICI**

Una matrice è definita come una tabella a doppia entrata composta da m righe ed n colonne. Generalmente viene indicata con le prime lettere maiuscole dell’alfabeto, utilizzando 2 parentesi grandi al cui interno ci sono i valori. Dato che, come detto, è a doppia entrata, saranno necessari 2 pedici, aventi un significato ben preciso:

* il primo sta ad indicare la riga in cui si trova l’elemento;
* il secondo ne indica invece la colonna.

a11 a12 a13 … a1n

A = a21 a22  a23 … a2n

… … … … …

am1 am2 am3 … amn

Da ciò si deduce che una matrice è una tabella ordinata. Ad esempio il termine a12 indica l’elemento di una matrice che si trova in prima riga, seconda colonna.

Un generico elemento di una matrice viene indicato con aij dove: i = 1 … m

j = 1 … n

La matrice rappresentata in alto è del tipo (m, n). Inoltre, se i suoi elementi sono numeri reali, si dice che essa appartiene ad Rmxn.

Ogni matrice è caratterizzata da una dimensione, la quale si definisce come il prodotto tra il numero di righe e il numero di colonne. Tale prodotto non va indicato come numero bensì, in una matrice con m righe ed n colonne, la dimensione sarà pari ad m x n.

NOMI E DEFINIZIONI DI MATRICI

* Si definisce matrice RIGA una matrice di tipo (1, n), ossia, come suggerisce il nome stesso, una matrice formata da una sola riga, indipendentemente dal numero di colonne. Un esempio di matrice riga, o anche detta VETTORE RIGA è:

[1 4 8 -7] R1,4

* Al contrario, una matrice formata da una sola colonna, ossia del tipo (m, 1), si dice matrice COLONNA o VETTORE COLONNA. Esempio:

2

5 R3,1

-1

* MATRICE RETTANGOLARE: è una matrice in cui il numero delle righe è diverso dal numero delle colonne, ovvero m ≠ n. Non importa quante esse siano, l’importante è che non siano in ugual numero.
* MATRICE QUADRATA: è una matrice che ha il numero di righe uguale al numero di colonne, quindi m = n.
* Si definisce inoltre, ORDINE di una matrice quadrata, il numero di righe o equivalentemente, il numero di colonne. Ad esempio, in una matrice di n righe ed n colonne, l’ordine è n.
* MATRICE DIAGONALE: è una matrice in cui tutti i valori che non appartengono alla diagonale principale sono uguali a zero. In formule:

A è diagonale 🡨🡪 i ≠ j aij = 0

Esempio:

1 0 0

0 5 0

0 0 -7

La matrice diagonale è sia triangolare superiore che triangolare inferiore.

* Data una matrice quadrata, si definisce DIAGONALE PRINCIPALE la diagonale che va dall’angolo in alto a sinistra all’angolo in basso a destra; mentre si dice DIAGONALE SECONDARIA, o ANTIDIAGONALE, la diagonale che va dall’angolo in alto a destra all’angolo in basso a sinistra.

Esempio di diagonale principale e diagonale secondaria:

3 1 9 3 1 9

-7 2 -3 -7 2 -3

5 6 10 5 6 10

* MATRICE ANTIDIAGONALE: è una matrice in cui i soli termini della diagonale secondaria possono essere diversi da zero.
* Una matrice quadrata si dice TRIANGOLARE se e solo se il secondo indice è minore di zero.

A è triangolare 🡨🡪 j > i aij = 0

Esempio:

a11 0 0 0

A = … a22 … 0

am1 am2 … amn

* TRIANGOLARE INFERIORE, è una matrice in cui tutti gli elementi che stanno al di sopra della diagonale della matrice sono zeri.

Esempio:

1 0 0

A = 2 3 0

7 -2 π

* Una matrice quadrata si dice TRIANGOLARE SUPERIORE se e solo se l’indice di riga è maggiore dell’indice di colonna.

A è triangolare superiore 🡨🡪 i > j aij = 0

Esempio:

7 2 4

A = 0 1 3

0 0 19

* Una matrice diagonale con tutti 1 sulla diagonale è chiamata MATRICE IDENTITA’ di ordine n, dove n è la dimensione.

La matrice identità si indica con I ed è:

I = 1 0

1. 1

* Una matrice si dice NULLA se è composta da tutti zeri.

OPERAZIONI SULLE MATRICI

**SOMMA:**

siano A e B matrici della stessa dimensione (cioè stesso numero di righe e di colonne), si definisce SOMMA tra A e B la matrice C:

C = A + B 🡨🡪 ij Cij  = aij + bij

Nella somma tra due matrici valgono le seguenti proprietà:

* **Commutativa**: A + B = B + A
* **Associativa**: (A + B) + C = A + (B + C)

Esempio di somma:

1 40 2 2 5 10 3 45 12

2 3 4 + 3 2.18 4 = 5 5.18 8

1 -3 12 1 0.5 4 2 -2.5 16

* + Si dice matrice OPPOSTA alla matrice data quella matrice che sommata alla matrice data mi restituisce la matrice nulla.

Esempio:

A = 2 3 4

1 - 3 12/7

L’opposta sarà:

-A = -2 -3 -4

-1 3 -12/7

La somma tra le 2 mi restituisce la matrice nulla:

N = 0 0 0

0 0 0

**DIFFERENZA:**

siano A e B matrici della stessa dimensione (cioè stesso numero di righe e di colonne), si definisce DIFFERENZA tra A e B la matrice C:

C = A - B 🡨🡪 ij Cij  = aij - bij

Anche nella differenza tra due matrici valgono le seguenti proprietà:

* **Commutativa**: A - B = B - A
* **Associativa**: (A - B) - C = A - (B - C)

Esempio di somma:

1 40 2 2 5 10 -1 35 -8

2 3 4 - 3 2.1 4 = -1 0.9 0

1 -3 12 1 0.5 4 0 -3.5 8

**PRODOTTO:**

date due matrici A e B, una matrice C è il prodotto di A e B:

C = A x B 🡨🡪 ij Cij = ∑nk=1 aik bkj con ARmxn, BRnxp

i = 1 … m

j = 1 … p

Il prodotto tra due matrici non è il prodotto elemento per elemento!

Pertanto non vale nemmeno la proprietà commutativa. Infatti: A x B ≠ B x A

Il prodotto è possibile farlo solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice.

Fai un esempio!!!!!!!!

Quale sarà la matrice neutra, prendendo una matrice 2x2?

La matrice IDENTITA’.

Esempio sul quad.

**DETERMINANTE**

Il determinante di una matrice è un numero e si calcola solo per matrici quadrate.

Data una matrice mxn quadrata, il determinante si costruisce in maniera ricorsiva.

**DETERMINANTE DI UNA MATRICE CON UN SOLO ELEMENTO:**

A = a11 A c Rnx1  det(A) = a11 oppure |A| = a11

**DETERMINANTE DI UNA MATRICE 2x2:**

Se la matrice è 2x2, per calcolare il determinante si sceglie una riga o una colonna (scelgo ad esempio la prima riga). Dopodichè si prende ogni elemento della prima riga e lo si moltiplica per il determinante della matrice che si ottiene eliminando la riga e la colonna su cui giace quell’elemento.

2x2 : A = a11 a12 |A| = a11 x a22 – a12  x a21 = a11 x a22 - a12 x a21

a21 a22

**DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3x3:**

**DETERMINANTE DI UNA MATRICE 4x4:**

**PROPRIETA’ DEL DETERMINANTE**

**PRIMA PROPRIETA’:**

se una matrice ha una riga o una colonna tutta nulla, il determinante di quella matrice è uguale a zero.

**SECONDA PROPRIETA’:**

se ho una matrice A e considero un’altra matrice B che si ottiene a partire da A moltiplicando una o una colonna per uno stesso numero c, il determinante di B è uguale a c volte il determinante di A.

esempio:

A = 2 3 B = 4 6

1 7 1 7

Il determinante di B è il doppio del determiante di A, perché la prima riga l’ho ottenuta moltiplicando per 2 la prima riga di A.

Pertanto: |B| = c \* |A|

**TERZA PROPRIETA’:**

se una matrice ha una riga che è multipla di un’altra riga, o una colonna che è multipla di un’altra colonna, il determinante è uguale a zero, quindi è nullo.

Esempio: il determinante di questa matrice A = 2 3 è zero.

4 6

Da questa proprietà ne discende un’altra.

**QUARTA PROPRIETA’:**

se ho una matrice A e a partire da A mi costruisco una matrice B sostituendo a una riga quella riga a cui aggiungo il multiplo di un’altra riga, il determinante non cambia.

Esempio: ho una matrice A = 2 3

1 5

Da questa, mi costruisco una matrice B avente come seconda riga la stessa di A, ma come prima riga la somma tra la prima e la seconda riga di A. Quindi:

B = 3 8

1 5

Si ha che: |A| = |B|

Allora, in considerazione di questa proprietà, possiamo:

consideriamo questa matrice A = 2 3 5

4 -2 3

6 1 7

Sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda riga e la prima moltiplicata per -2, ottengo quindi: -4 -6 -10

Poi al posto della seconda riga, faccio la prima meno questa che ho trovato, avrò:

2 3 5

0 -8 -7

6 1 7

In base alla proprietà in questione, il determinante di questa matrice è uguale al determinante dell’altra matrice.

Se ora ripeto il discorso e sostituisco alla terza riga, la terza riga meno la prima moltiplicata per 3 avrò:

2 3 5

4 -2 3

0 -8 -8

Questa nuova matrice avrà sempre il determinante uguale alla prima.

Se ora a questa matrice, sostituisco alla terza riga la terza meno la seconda, avrò: 0 0 -1 che ha sempre determinante uguale.

**QUINTA PROPRIETA’:**

se in una matrice scambio due righe o due colonne, il determinante cambia il segno.

Esempio: A = 1 4 B = 2 3

2 3 1 4

Nella matrice A il determinante è 5, nella matrice B invece è -5.

Naturalmente, se effettuo un numero pari di scambi, il determinante non cambia. Cambia solamente se effettuo un numero dispari di scambi.

**MATRICE TRASPOSTA:**

Data una matrice Amxn, la TRASPOSTA di questa matrice è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne.

Le matrici trasposte possono essere anche matrici non quadrate.

B = AT  🡨🡪 b

B è la matrice trasposta di A se e solo se gli elementi della matrice B sono quelli che si ottengono invertendo l’indice di righe e l’indice di colonne della matrice A.

Esempio: se ho la matrice A = 1 2

3 4

La trasposta sarà: AT = 1 3

2 4

**MATRICE INVERSA:**